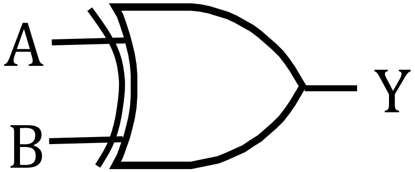
# XOR論理ゲート

- 回路記号




- 論理式

$$Y = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = A \oplus B$$

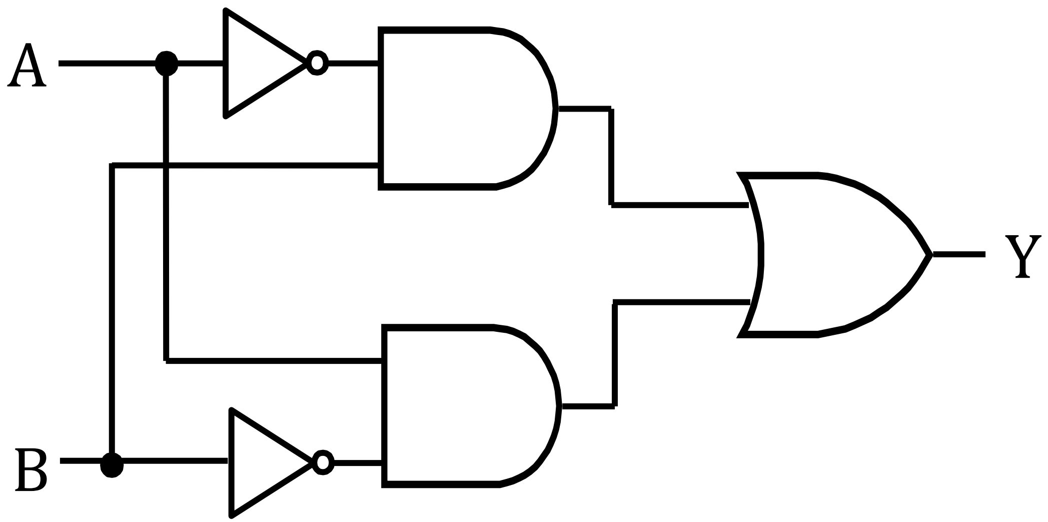
- 真理値表

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# AND,OR,NOTでどう実現できる？

- 次のスライドでわかるが、構造がある程度複雑で直感（真理値表から）では簡単に作成できるものではない

# AND,OR,NOTでどう実現できる？




$$Y = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = A \bigoplus B$$

# 演習08-1

- 問題は次のスライド参照
- manaba, 10分
- 8点を4点に換算

# 真理値表→論理式→論理回路

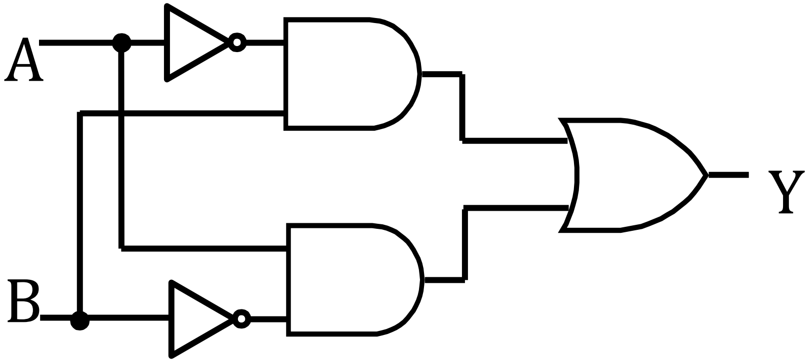
- 以上から論理回路・論理式から真理値表を求めるのは簡単であることがわかる
- しかし逆、つまり真理値表から論理式・論理回路をもとめるのはそうではない

# 真理値表→論理式→論理回路

- 真理値表から論理式を「加法標準形」と呼ばれる方法で求めれることができる
  - Y=1に着目して「最小項」を作成し、最小項を加算する（論理和にする）
  - 下記の例では、$A \cdot \overline{B}$などが項数が1で最小項となる（ A+Bなら項数が2で最大項）

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| A | B | Y | 最小項 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | $\overline{A} \cdot B$ |
| 1 | 0 | 1 | $A \cdot \overline{B}$ |
| 1 | 1 | 0 | |



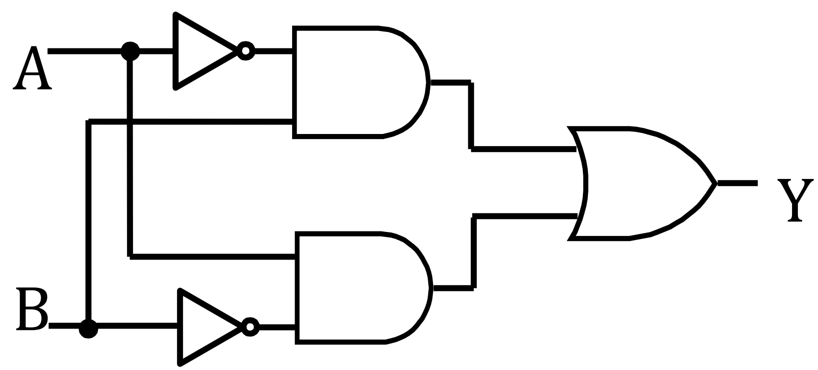

$$Y = A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B$$

# 真理値表→論理式→論理回路

- 真理値表から論理式を「乗法標準形」と呼ばれる方法で求めれることができる
  - Y=0に着目して「最大項」を作成し、最大項を論理積にする

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| A | B | Y | 最大項 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $A+B$ |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | $\bar{A}+\bar{B}$ |




$$\mathrm{Y}=(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\bar{A}+\bar{B})$$
$$=\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}}+\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}$$

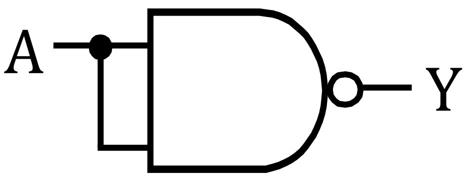
$Y = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$に対応するXOR論理回路は？

# 論理ゲートNANDについて

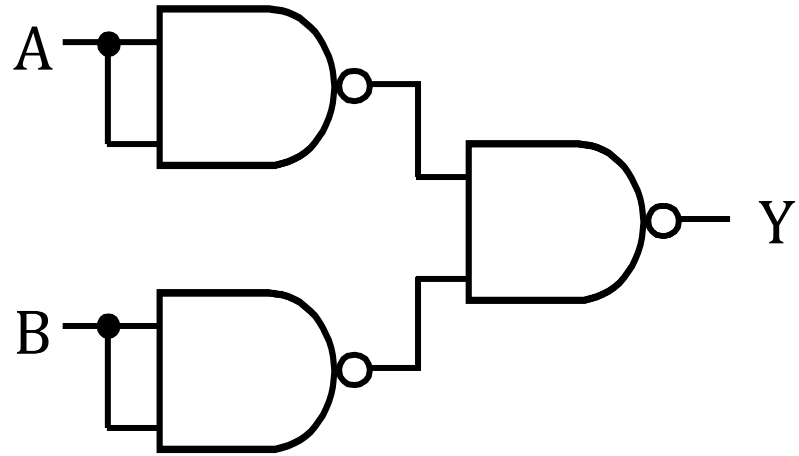
- 前回講義資料の参考ページ「論理ゲートの実装」にもあるように、実用上ICの品種として論理ゲートNANDが多い
- 実際、すべての論理ゲートをNANDゲートで実現できる

# NANDですべての論理ゲートが実現（作成）できる

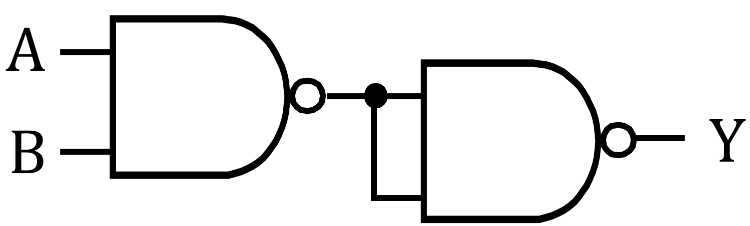
NOT




OR



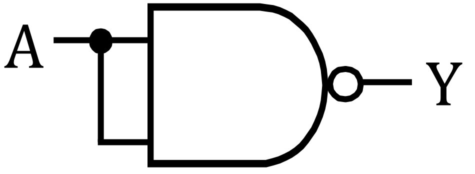

AND



# これらって本当に正しいのか？

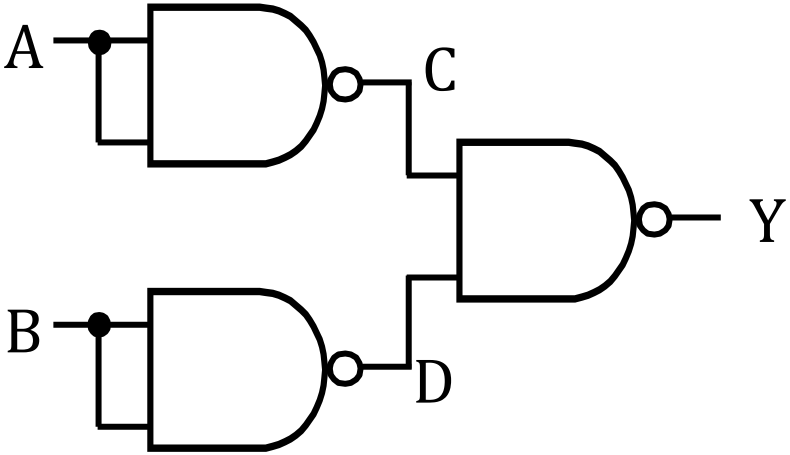
- 真理値表をもとめて確認することができる

# 演習：下記回路の真理値表をもとめ、NOTであることを証明しなさい




| A | A | Y |
|---|---|---|
| | | |
| | | |

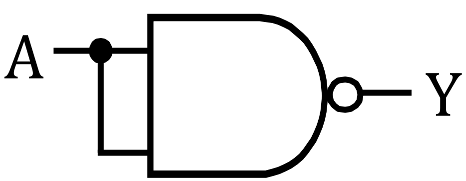
# 演習：下記回路の真理値表をもとめ、ORであることを証明しなさい




| A | B | C | D | Y |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| 0 | 1 | | | |
| 1 | 0 | | | |
| 1 | 1 | | | |

# ほかに証明する方法はないか？

- 真理値表をもとめれば証明できるが、ほかに方法はないだろうか。
- 回路→論理式→論理式の変形で証明することも可能




$$Y = \overline{A \cdot A} = \overline{A} + \overline{A} = \overline{A}$$

論理式の変形

# 論理式の変形

# 論理式の変形（公理）

- 恒等則

  $A \cdot 1 = A, \ A + 0 = A$

- 交換則

  $A \cdot B = B \cdot A, \ A + B = B + A$

- 相補則

  $A \cdot \overline{A} = 0, \ A + \overline{A} = 1$　　（Aと$\overline{A}$が互いの補元）

- 結合則

  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \ (A + B) + C = A + (B + C)$

- 分配則

  ①$(A \cdot B) + C = (A + C) \cdot (B + C)$

  ②$(A + B) \cdot C = (A \cdot C) + (B \cdot C)$

分配則以外は自明。
分配則については
C=0, 1を代入して考えればわかる

# 論理式の変形(定理)

- べき等則

$$\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}=\mathrm{A},\ \mathrm{A}+\mathrm{A}=\mathrm{A},\ \mathrm{A}+1=1,\ \mathrm{A}\cdot 0=0$$

- 二重否定

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}}=\mathrm{A}$$

- 吸収則

$$\mathrm{A}\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\mathrm{A},\ \mathrm{A}+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})=\mathrm{A}$$

$$\mathrm{A}\cdot(\overline{\mathrm{A}}+\mathrm{B})=\mathrm{A}\cdot\mathrm{B},\ \mathrm{A}+(\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B})=\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

- ド・モルガンの法則

$$\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}+\overline{\mathrm{B}}$$

$$\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}$$

これら以外はほぼ自明(または
すぐ導出できる)。

# 乗法標準形で求めたXORの式変形の証明

- 以下の式変形が成り立つことを論理式変形の公理・定理を使って証明しなさい

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{A} + \mathrm{B}) \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = \mathrm{A} \cdot \overline{\mathrm{B}} + \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B}$$

# 乗法標準形で求めたXORの式変形の証明

$$Y = \overbrace{(A+B)}^{C} \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

分配則②　　　　　　　　　　　　分配則②など

$$= (A+B)\bar{A} + (A+B)\bar{B} = B\overline{A} + A\overline{B}$$

注意:ここでは論理積の演算子「・」を省略している。今後、混乱が生じない限り断りなく省略する場合がある

# 演習

- 吸収則$A \cdot (A + B) = A$を論理式変形の公理・（それより前にある）定理を用いて証明しなさい

# 演習

- 吸収則$\mathrm{A} + (\overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{B}) = \mathrm{A} + \mathrm{B}$を論理式変形の公理・（それより前にある）定理を用いて証明しなさい

# 演習

- 以下のド･モルガンの法則①を真理値表で証明しなさい

ド･モルガンの法則

$$\overline{\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}} \quad \ldots ①$$

$$\overline{\mathrm{A} + \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}} \quad \ldots ②$$

# ド･モルガンの法則①の証明

- $\overline{\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}$を証明するためには、$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$が$\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}$の補元であることを証明すればよい。つまり、

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}) = 1$$
$$(\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}) \cdot (\overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}) = 0$$

を証明できればよい

以下省略。授業でノートを取ってください。

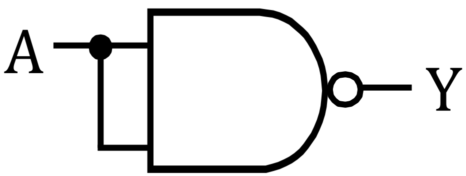
# ド･モルガンの法則②の証明

- $\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}$の証明はド･モルガンの法則①を利用すると簡単にできる

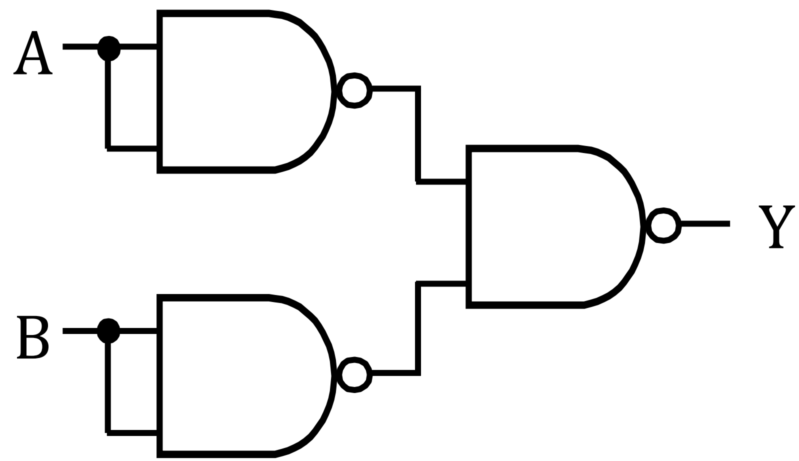
再掲

# NANDですべての論理ゲートが実現（作成）できる

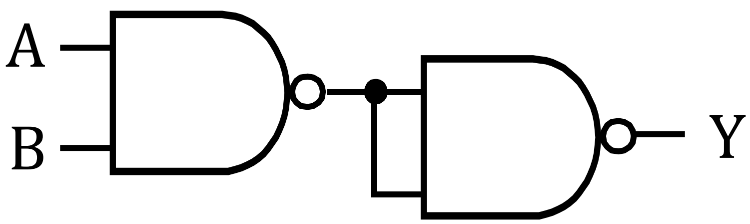
NOT




OR




AND



# NOTはなぜNANDで作れるか？

$$Y = \bar{A}$$

# NOTはなぜNANDで作れるか？

$$Y=\bar{A}=\boxed{\bar{A}+\bar{A}=\overline{A\cdot A}}$$

ド・モルガンの法則①

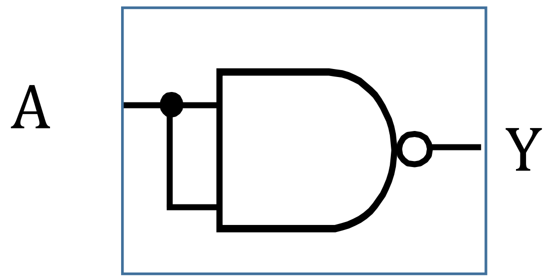
$$\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}+\overline{\mathrm{B}}$$

べき等則

# NOTはなぜNANDで作れるか？

$$Y = \bar{A} = \bar{A} + \bar{A} = \boxed{\overline{A \cdot A}}$$

AとAについてNANDを行う




NOT

# ANDはなぜNANDで作れるか？

$$Y = A \cdot B$$

# ANDはなぜNANDで作れるか？

ド・モルガンの法則①

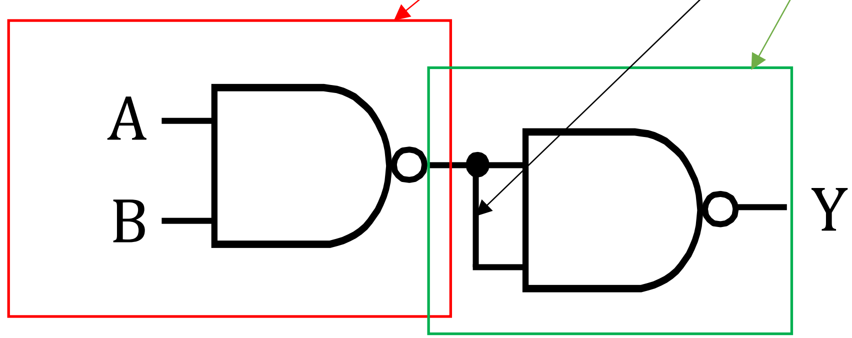
$$\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}$$

$$Y = A \cdot B = A \cdot B + A \cdot B = \overline{\overline{A \cdot B}} + \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot B}}$$

べき等則

NAND

NAND




AND

# 演習08-2

- ORはなぜNANDで作れるか
- manabaレポート
- 提出締め切り:翌週火曜日12:30
- 5点